

# 不含旋转角度微分的螺旋锥束 CT 重建

马建华 陈武凡

(南方医科大学生物医学工程学院, 广州 430074)

**摘要** 近年来, Katsevich 提出一种基于滤波反投影的螺旋锥束 CT 重建算法, 并给出相应的重建公式改进形式, 可以有效地解决长物体成像问题。基于 Katsevich 算法框架, 提出了新的螺旋锥束 CT 精确重建算法。该算法利用数学上严格的推导, 将 Katsevich 重建公式中关于旋转角度的微分运算完全回避, 使得成像质量得到较大改善, 减少了重建伪影。同时, 新算法仍然基于平移不变滤波且数据冗余加权在滤波过程之后进行, 保持了数值计算的灵活性。为验证本文算法的有效性, 对计算机模拟数据进行仿真实验, 实验结果表明, 新重建算法的重建图像质量较 Katsevich 重建算法有较大提高。

**关键词** 计算机断层成像 螺旋锥束 Hilbert 滤波

中图法分类号: TP301.6 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)04-0647-07

## Rotation Angle Derivative-free Image Reconstruction in Cone-beam Helical CT

MA Jian-hua, CHEN Wu-fan

(School of Biomedical Engineering, Southern Medical University, Guangzhou 510515)

**Abstract** Recently, Katsevich proposed an exact FBP algorithm and its improved version for image reconstruction in helical cone-beam CT. In this paper, we present a new FBP image reconstruction algorithm based on the Katsevich's original algorithm paradigm. This proposed algorithm can achieve good image quality improvement and fewer artifacts since it successfully avoids the direct derivatives with respect to rotation angle. The new algorithm still performs a 1D shift-invariant filtering of the modified data on the detector plane and the redundancy weight is applied after filtering, allowing a more efficient numerical implementation. Results in these studies confirm the observation that the proposed algorithm can improve the image resolution over Katsevich's original algorithm with noiseless and noise projection data.

**Keywords** computerized tomography, helical cone-beam, Hilbert filter

## 1 引言

自1998年多层面螺旋CT(multislice spiral/helical CT, MSCT)出现以来<sup>[1]</sup>, 螺旋锥束CT(spiral/helical cone-beam CT, HCT)得到广泛的研究, 主要集中在逼近重建算法和精确重建算法的提出及算法的高效性和稳定性的设计上。近年来, Katsevich 提出漂

亮的螺旋锥束滤波反投影(filtered backprojection, FBP)重建算法<sup>[2-5]</sup>, 可以有效地解决长轴断面重建问题, 其算法思想是先将投影数据关于螺旋轨道长度微分, 然后在探测器平面内的特定直线族上对微分数据进行平移不变滤波(shift-invariant filtering), 接着将所得滤波数据采用经典的FDK(feldkamp-davis-kress)算法<sup>[1]</sup>形式完成反投影过程得到重建结果。其后, Zou 等人基于 Katsevich 重建算法提出一新

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 973 项目(2003CB716101)

收稿日期: 2006-09-08; 改回日期: 2006-11-06

第一作者简介: 马建华(1975~), 男。南方医科大学生物医学工程专业博士研究生。主要研究方向为3维CT重建、计算机图形学。

E-mail: jhma@fimmu.com

通讯作者: 陈武凡, E-mail: chenwf@fimmu.com

的精确重建算法<sup>[6,7]</sup>,与 Katsevich 算法的区别在于,算法中滤波过程是在  $\pi$  线上进行且用于重建的投影数据仅为 TD(tam-danielsson)<sup>[8]</sup> 窗内数据。两算法为有效地研究长物体锥束 CT 成像相关问题做出了突出贡献。Katsevich 在其论文中给出的重建算法多为一般轨道上的通用形式,不考虑探测器几何结构,较抽象,不便于工程应用。其后, Noo 等人基于螺旋轨道将 Katsevich 的精确重建公式进行数学上的等价变形得出一新的精确重建算法<sup>[9]</sup>,该算法使重建中滤波过程为 1 维的 Hilbert 滤波,易于数值计算。但 Noo 等人的重建公式中含有对旋转角度的求导运算,使得重建图像质量的好坏依赖于对旋转角度的采样。

本文在 Katsevich 精确重建算法框架下,给出新的基于滤波反投影的精确重建公式。新重建公式将 Katsevich 重建算法关于对投影数据中旋转角度的微分完全回避。类似的结果, Katsevich 在论文中也曾给出<sup>[4]</sup>,但所给重建公式由 5 项组成,公式结构较为复杂,难以得到高效的应用。本文给出的新重建公式虽然仅利用数学方法对 Noo 等人提出的重建公式中滤波过程等价变形,但确有更为有效的实用价值,这是因为,在临床 CT 成像中,对旋转角度的采样率与探测器平面的探测元采样率相比要低的多,这使得投影数据中对探测器坐标变量的求导可以得到较高的数值计算精度,但高质量的重建图像,理论上还需要对旋转角度进行高采样才能达到。然而,在实际 CT 成像时则要求保持高速的成像速度以减少运动伪影的产生及病人对 X 射线的吸收,真正意义上的旋转角度高采样是不现实的,所以,将重建公式中关于旋转角度的求导运算进行回避是非常必要的。为验证本文重建算法的有效性,进行了数值模拟实验,结果表明,本文提出的重建算法得到的重建图像质量较 Noo 等人给出的 Katsevich 重建算法有较大改善。

## 2 理论背景

### 2.1 相关记号

如图 1 所示,感兴趣区域的重建坐标点用向量  $\mathbf{x}$  或其分量形式  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  来表示。待重建图像在点  $\mathbf{x}$  的函数值用  $f(\mathbf{x})$  表示(核物理中称之为衰减系数)。对于给定的  $R < R_0$ ,假设  $f(\mathbf{x})$  在柱体  $x^2 + y^2 < R_0^2$  内非零,而区域  $x^2 + y^2 < R_0^2$  称为视场 FOV(field of view)。在 3 维笛卡尔坐标系中螺旋轨道表示为

$$\mathbf{y}(\lambda) = (R\cos\lambda, R\sin\lambda, \frac{h}{2\pi}\lambda)^T \quad (1)$$

式中,  $h$  表示螺距,  $R$  表示射源  $\mathbf{y}(\lambda)$  与旋转中心的距离,  $\lambda$  为旋转角度,  $T$  代表向量的转置。探测数据可经如下锥束变换获得:

$$D_f(\mathbf{y}(\lambda), \boldsymbol{\beta}) = \int_0^\infty dt f(\mathbf{y}(\lambda) + t\boldsymbol{\beta}) \quad (2)$$

式中,  $\boldsymbol{\beta}(\lambda, \mathbf{x})$  表示穿过点  $\mathbf{x}$  射线的单位向量,由下式确定:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} \quad (3)$$

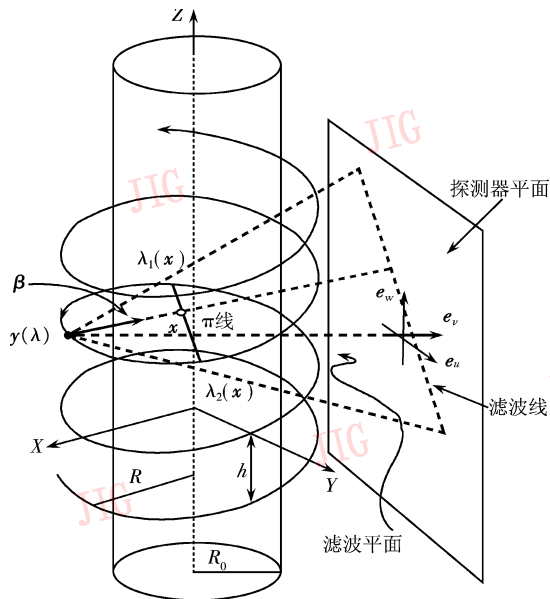


图 1 基于平面探测器的螺旋 CT 成像几何

Fig. 1 Geometry of a helical cone-beam imaging with a flat detector plane

### 2.2 基于平面探测器的螺旋 CT 成像几何

为了新算法推导方便,仅以平面探测器的螺旋 CT 成像几何为例进行推导,对于曲面探测器情形的重建算法可类推得到。在新算法的推导中,首先引入旋转坐标系  $(u, v, w)$ ,对于给定的任一旋转角  $\lambda$ ,设 3 个两两垂直的单位向量  $\mathbf{e}_u(\lambda)$ ,  $\mathbf{e}_v(\lambda)$ ,  $\mathbf{e}_w(\lambda)$  如图 1 所示,分别为

$$\mathbf{e}_u(\lambda) = (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0)^T \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_v(\lambda) = (-\cos\lambda, -\sin\lambda, 0)^T \quad (5)$$

$$\mathbf{e}_w(\lambda) = (0, 0, 1)^T \quad (6)$$

可见,单位向量  $\mathbf{e}_u(\lambda)$  和  $\mathbf{e}_v(\lambda)$  在  $x$ - $y$  平面内,而单位向量  $\mathbf{e}_w(\lambda)$  与  $z$  轴平行。此时,  $\mathbf{e}_w(\lambda)$  可解释为探测器平面的单位法向量,探测器平面的横坐标和纵坐标单位向量可分别设为  $\mathbf{e}_u(\lambda)$  和  $\mathbf{e}_v(\lambda)$ ,其原点设为射源  $\mathbf{y}(\lambda)$  在探测器平面的垂直投影点。这样,探测器平面内的任一点都可由

点对  $(u, w)$  确定。

在如上定义的探测器平面中, 锥束投影数据可表示为关于坐标  $u$  和  $w$  的函数, 记为

$$P(\lambda, u, w) = D_f(\mathbf{y}(\lambda), \boldsymbol{\beta}) \quad (7)$$

且

$$\begin{aligned} u\mathbf{e}_u(\lambda) + w\mathbf{e}_w(\lambda) + D\mathbf{e}_v(\lambda) &= A\boldsymbol{\beta} \\ A(u, w) &= \sqrt{u^2 + w^2 + D^2} \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $A$  为射源到探测器上探测点  $(u, w)$  的距离,  $D$  为射源到探测器平面中心的距离。反之, 有

$$D_f(\mathbf{y}(\lambda), \boldsymbol{\beta}) = P(\lambda, u, w) \quad (9)$$

式中,

$$u = D \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_u}{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_v}, w = D \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_w}{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_v} \quad (10)$$

### 2.3 Katsevich 重建公式

基于滤波反投影的 Katsevich 重建公式如下:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{I_{PI}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} \times \\ &\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} D(\mathbf{y}(\lambda), \Theta(\lambda, \mathbf{x}, \gamma)) \Big|_{q=\lambda} \frac{d\gamma d\lambda}{\sin\gamma} \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $I_{PI} = [\lambda_1, \lambda_2]$  表示穿过重建点  $\mathbf{x}$  唯一  $\pi$  线所确定的旋转角参数区间, 而  $\Theta(\lambda, \mathbf{x}, \gamma) = \cos\gamma\boldsymbol{\beta}(\lambda, \mathbf{x}) + \sin\gamma\mathbf{e}(\lambda, \mathbf{x})$  表示位于  $\kappa$  平面内的向量<sup>[4]</sup>。

Katsevich 已经证明, 对于给定点  $\mathbf{x}$ , 若  $\mathbf{x}$  点在探测器上的投影  $\hat{\mathbf{x}}$  位于  $TD$  窗内, 则  $\kappa$  平面被唯一确定。 $\kappa$  平面与探测器平面的交线称为  $\kappa$  线。显而易见, 当  $\hat{\mathbf{x}}$  位于  $TD$  窗内时,  $\kappa$  线唯一。由  $\kappa$  线与  $\pi$  线的性质可知, 对于视场内的点  $\mathbf{x}$ , 设穿过该点的  $\pi$  线所确定的两端点为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  且满足  $\lambda_1 < \lambda_2$ , 则任给  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , 必存在经过点  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}(\lambda)$  的  $\kappa$  平面<sup>[2,3]</sup>。

### 3 新重建公式的理论分析

根据 Katsevich 螺旋锥束 CT 的算法框架<sup>[9]</sup>, 视场内的点  $\mathbf{x}$  处的密度值  $f(\mathbf{x})$  可通过穿过点  $\mathbf{x}$  的  $\pi$  线段所确定的螺旋轨道区间上的投影数据先进行滤波运算后, 再经过加权反投影过程得到, 重建公式可写为

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(\mathbf{x})}^{\lambda_2(\mathbf{x})} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} g^F(\lambda, \boldsymbol{\beta}) \quad (12)$$

式中,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别定义为穿过点  $\mathbf{x}$  的  $\pi$  线与螺旋轨道相交的两个端点, 用于确定螺旋轨道区间, 且满足  $\lambda_1 < \lambda_2$ ,  $g^F(\lambda, \boldsymbol{\beta})$  表示滤波数据。

要获得滤波数据  $g^F(\lambda, \boldsymbol{\beta})$ , 需计算在固定方向

$\boldsymbol{\beta}$  下投影数据  $D_f(\mathbf{y}(\lambda), \boldsymbol{\beta})$  对旋转角  $\lambda$  的导数, 即  $\frac{\partial}{\partial \lambda} D_f(\mathbf{y}(\lambda), \boldsymbol{\beta})$ 。在基于平面探测器的螺旋 CT 成像几何下, 由于  $D_f(\mathbf{y}(\lambda), \boldsymbol{\beta})$  中  $\mathbf{y}(\lambda)$  和  $\boldsymbol{\beta}$  均为关于  $\lambda$  的函数, 记  $P_\lambda(\lambda, u, w) = \frac{\partial}{\partial \lambda} D_f(\mathbf{y}(\lambda), \boldsymbol{\beta})$ , 根据式(7)~式(9), 利用导数链式法则,  $P_\lambda(\lambda, u, w)$  可表示如下:

$$\begin{aligned} P_\lambda(\lambda, u, w) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} P(\lambda, u, w) + \frac{\partial}{\partial u} P(\lambda, u, w) \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \\ &\frac{\partial}{\partial w} P(\lambda, u, w) \frac{\partial w}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (13)$$

因为  $u = D \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_u}{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_v}$ ,  $w = D \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_w}{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_v}$ , 将向量点乘化为对应坐标表示后, 再由微分运算可得

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{D^2 + u^2}{D}, \frac{\partial w}{\partial \lambda} = \frac{uw}{D} \quad (14)$$

此时,

$$P_\lambda(\lambda, u, w) = \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda} + \frac{D^2 + u^2}{D} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{uw}{D} \frac{\partial P}{\partial w} \right) \cdot (\lambda, u, w) \quad (15)$$

假设  $P_\lambda(\lambda, u, w)$  已知, 则滤波数据  $g^F(\lambda, \boldsymbol{\beta})$  可由下式确定:

$$g^F(\lambda, \boldsymbol{\beta}) = \int_0^{2\pi} d\gamma h_\kappa(\sin\gamma) P_\lambda(\lambda, u, w)_\kappa \quad (16)$$

式中,  $h_\kappa(\sin\gamma)$  为滤波核函数,  $P_\lambda(\lambda, u, v)_\kappa$  表示滤波线  $\kappa$  上的微分数据。鉴于式(16)中滤波核函数的表达不便于数值计算, 类似于文献[9]中的推导过程可将  $h_\kappa(\sin\gamma)$  进行等价转换, 得到关于探测器平面变量的 Hilbert 滤波形式。此时, 有

$$g^F(\lambda, \boldsymbol{\beta}) = -\frac{1}{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_v} g_{(f)}^F(\lambda, u, w) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} g_{(f)}^F(\lambda, u, w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{u} \hat{u} h(u - \hat{u}) \times \\ &\frac{D}{A(u, w)} P_\lambda(\lambda, \hat{u}, w) \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $h$  表示 Hilbert 变换核函数, 即  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ , 定义为

$$h(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (i \operatorname{sgn}(\omega)) e^{i2\pi\omega t} \quad (19)$$

在式(15)的计算中, 需要沿旋转轨道对投影数据  $P(\lambda, u, w)$  中旋转角  $\lambda$  进行求导运算, 然而数值计算中导数要通过差分格式逼近, 这使得对旋转角的微分精度强依赖于单螺旋内旋转角的采样率。鉴于此, Katsevich 在给出改进的重建公式<sup>[4]</sup>, 可以有效地回避

对旋转角的求导运算,但其重建公式中有 5 项组成,使得算法难于实现且计算复杂度远高于重建式(11)。

因为  $f(\mathbf{x})$  可以通过对相应的滤波数据  $g_{(f)}^F(\lambda, u, w)$  反投影得到,而对于滤波数据可以通过数学上严格的推导(见附录),将式(11)中对旋转角  $\lambda$  微分巧妙地转移,得到新的重建公式。与 Katsevich 在文献[4]中的重建公式相比,本文新算法仅由 3 项组成。现将附录中得到新重建公式描述如下:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|^2} \times \left( -\frac{\partial \mathbf{y}(\lambda)}{\partial \lambda} \cdot \boldsymbol{\beta} \right) g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta - \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} \times g_h^{(2)}(\lambda, u, w)_\beta - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} \times g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta \Big|_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} \quad (20)$$

式中,  $g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta$  和  $g_h^{(2)}(\lambda, u, w)_\beta$  分别表示  $\boldsymbol{\beta}$  方向上不同的滤波数据,而  $g_h^{(1)}(\lambda, u, w)$  和  $g_h^{(2)}(\lambda, u, w)$  的表达式为

$$g_h^{(1)}(\lambda, u, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{u} h(u - \hat{u}) \times \frac{D}{A(u, w)} P(\lambda, u, w) \quad (21)$$

$$g_h^{(2)}(\lambda, u, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{u} h(u - \hat{u}) \frac{D}{A(u, w)} \times \left( \frac{u^2 + D^2}{D} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{uw}{D} \frac{\partial P}{\partial w} \right) (\lambda, u, w) \quad (22)$$

这里,

$$v_\beta = R - x \cos \lambda - y \sin \lambda \quad (23)$$

$$u_\beta = \frac{D}{v_\beta} (-x \sin \lambda + y \cos \lambda) \quad (24)$$

$$w_\beta = \frac{D}{v_\beta} \left( z - \frac{h}{2\pi\lambda} \right) \quad (25)$$

由式(20),可以对 Katsevich 重建算法进行高效精确的数值应用且使得计算复杂度相对于文献[4]中的重建算法大幅度降低。虽然新的重建公式仅是对 Katsevich 重建公式(11)在数学表达的形式变化,但这将有更为深刻的实际意义,因为在实际的螺旋锥束成像系统中,探测器平面的探测器单元的采样率远高于旋转角度的采样率,使得新的重建公式中投影数据对探测器变量  $u$  和  $w$  的数值求导运算其精度远高于投影数据对旋转角的求导运算。同时,因为实际成像中,重建时间越短对病人的射线辐射就

越少,这也使得对旋转角的采样不可能太高。

## 4 数值实验与结果

为验证本文算法的有效性,对修定的 3 维 Shepp-Logan 头部体模<sup>[10]</sup>利用解析法生成螺旋锥束投影数据。表 1 给出用于投影数据采集和重建中的各参数一览表。在数值计算中,投影数据关于旋转角  $\lambda$  的微分采用中心差分格式, Hilbert 滤波过程转化到频域内采用快速傅里叶变换进行。对滤波线  $w_k$ ,采用线性插值的方法确定。反投影过程则采用基于体素驱动的方法进行计算。重建算法中关于数据冗余加权直接采用文献[9]中的计算方法。

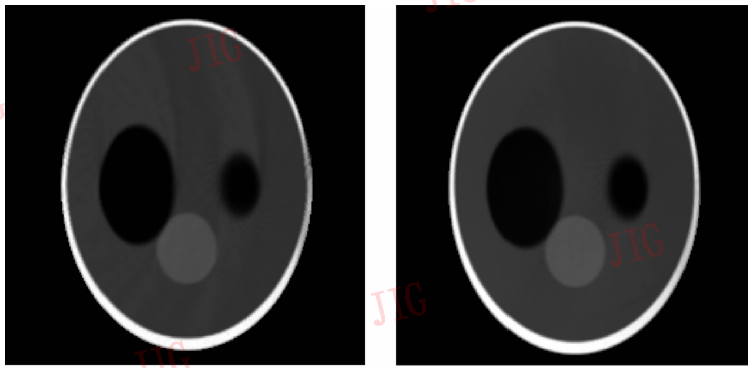
表 1 数值仿真实验各参数一览表

Tab.1 Simulation parameters in the experiment

参数	数值
射源到旋转轴的距离 (cm)	50
螺距 (cm)	1.56
射源到探测器的距离 (cm)	100
探测器单元的高度 (mm)	1.5
探测器单元的宽度 (mm)	1.5
单周内的投影个数	360
探测器的行数	16
探测器的列数	276

实验中,采用本文给出的重建算法和 Noo 等人在文献[8]中给出的 Katsevich 重建算法在相同重建参数下分别对 3 维 Shepp-Logan 体模投影数据进行 2 维横切面重建。重建结果如图 2 所示。其中图 2(a)为 Katsevich 算法重建结果,图 2(b)为本文算法重建结果。可以看出,本文重建算法较 Katsevich 重建算法在相同成像参数下具有更高的图像分辨率且伪影较少。为进一步验证本文重建算法的有效性,图 3 给出本文重建算法和 Katsevich 重建算法分别对 3 维 Shepp-Logan 体模的重建灰度值与理想体模在相同位置处灰度值的比较。图 3 中,点实线和实线分别表示对应于图 2(a)、图 2(b)水平中轴处的灰度值,点线表示相同位置处体模的理论值。由图 3 可以看出,本文算法对理想 3 维 Shepp-Logan 体模重建的重建结果较 Katsevich 算法更为精确。

为进一步说明本文算法的优越性,采用本文算法和 Katsevich 算法在相同重建参数下对 3 维 Shepp-Logan 体模进行局部断层重建。重建中在理想体模的投影数据中加入均值为零,方差为理想状态时投影数据最大值的 1%。图 4(a)和(b)分别为



(a) Katsevich算法重建结果

(b) 本文算法重建结果

图 2 本文重建算法和 Katsevich 重建算法分别对 3 维 Shepp-Logan 2 维横切面的重建结果

Fig. 2 Images reconstructed by use of Katsevich's algorithm and the proposed algorithm at transverse slice of 3D Shepp-Logan phantom, respectively

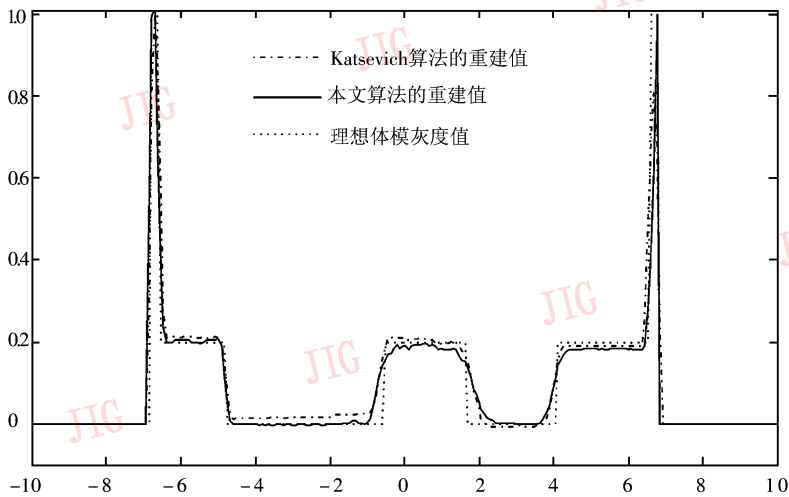
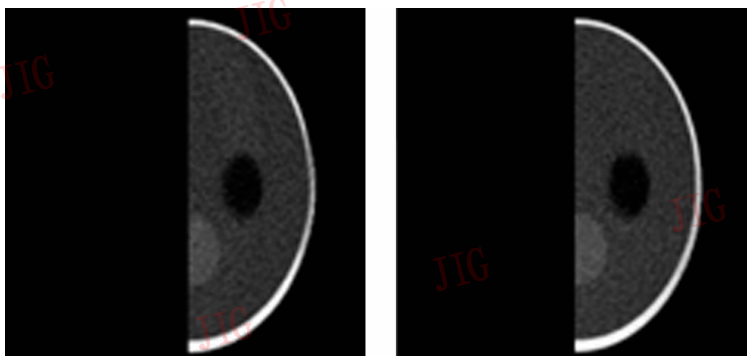


图 3 本文重建算法和 Katsevich 重建算法分别对 3 维 Shepp-Logan 体模的重建图像与理想体模在相同位置处的灰度值比较

Fig. 3 Profiles of the reconstructed images using the proposed algorithm and Katsevich's algorithm



(a) Katsevich算法重建结果

(b) 本文算法重建结果

图 4 本文重建算法和 Katsevich 重建算法分别对 3 维 Shepp-Logan 2 维横切面的重建结果,用于重建的投影数据含高斯噪声

Fig. 4 Images reconstructed by use of Katsevich's algorithm and the proposed algorithm at transverse slice of 3D Shepp-Logan phantom from data containing Gaussian noise

Katsevich 重建算法和本文重建算法的重建结果。同样可以看出,本文重建算法较 Katsevich 重建算法具有更强的抗噪性。

## 5 结 论

本文从实际的 CT 成像系统出发,充分考虑到 Katsevich 重建算法实现中对旋转角度进行高采样以达到更为精确的重建结果是不太现实的操作,为有效地回避旋转角度求导操作,采用数学方法巧妙地将 Katsevich 重建公式中关于旋转角度的求导运算转移,提出一新的螺旋锥束 CT 精确重建算法。新算法更具数值计算稳定性和精确性,并通过数值模拟实验给予验证。

**致 谢** 感谢美国芝加哥大学 Pan Xiao-chuan 教授提供的部分参考资料以及北京大学数学系姜明教授、周铁教授的悉心指导。本文得到国家重点基础研究发展规划 973 项目(2003CB716101)资助。

## 附录 A:新重建公式(20)的推导

本附录中,给出新重建公式(20)的数学推导。首先,记

$$\begin{aligned} \tilde{g}_h^{(1)}(\lambda, u, w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{u}h(u - \hat{u}) \frac{D}{A(u, w)} \frac{\partial P(\lambda, u, w)}{\partial \lambda} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{u}h(u - \hat{u}) \frac{D}{A(u, w)} P(\lambda, u, w) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$$\begin{aligned} g_h^{(2)}(\lambda, u, w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{u}h(u - \hat{u}) \frac{D}{A(u, w)} \times \\ &\left( \frac{u^2 + D^2}{D} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{uw}{D} \frac{\partial P}{\partial w} \right) (\lambda, u, w) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

由式(11)~式(16),可得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} g_{(f)}^F(\lambda, u, w)_\beta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} \tilde{g}_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta - \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} g_h^{(2)}(\lambda, u, w)_\beta \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

另记

$$g_h^{(1)}(\lambda, u, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{u}h(u - \hat{u}) \frac{D}{A(u, w)} P(\lambda, u, w) \quad (\text{A4})$$

将式(29)代入式(28)中第 1 项,关于变量  $\lambda$  取积分,得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} \tilde{g}_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta \Big|_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} + \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|^2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)) \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{y}(\lambda)}{\partial \lambda}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} \\ &\times g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta \Big|_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} + \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|^2} \left( \left(-\frac{\partial \mathbf{y}(\lambda)}{\partial \lambda}\right) \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \times \\ &g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

这里,  $g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta$  和  $g_h^{(2)}(\lambda, u, w)_\beta$  分别表示  $\boldsymbol{\beta}$  方向上不同的滤波数据。将式(30)代入式(28),得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|^2} \left( -\frac{\partial \mathbf{y}(\lambda)}{\partial \lambda} \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \times \\ &g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta - \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} g_h^{(2)}(\lambda, u, w)_\beta \\ &- \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)|} g_h^{(1)}(\lambda, u, w)_\beta \Big|_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

这里,

$$\begin{aligned} v_\beta &= -|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)| = (\mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda)) \cdot \mathbf{e}_v(\lambda) \\ &= R - x\cos\lambda - y\sin\lambda \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} u_\beta &= D \frac{\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_u \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_v \rangle} = D \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda), \mathbf{e}_u \rangle}{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda), \mathbf{e}_v \rangle} \\ &= \frac{D}{v_\beta} (-x\sin\lambda + y\cos\lambda) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} w_\beta &= D \frac{\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_w \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_v \rangle} = D \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda), \mathbf{e}_w \rangle}{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}(\lambda), \mathbf{e}_v \rangle} \\ &= \frac{D}{v_\beta} \left( z - \frac{h}{2\pi} \lambda \right) \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

## 参考文献 (References)

- 1 Feldkamp L A, Davis L C, Kress J W. Practical cone-beam algorithm [J]. Journal of the Optical Society of America, 1998, 6(1): 612~619.
- 2 Katsevich A. Theoretically exact filtered backprojection-type inversion algorithm for Spiral CT [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2002, 62(6): 2012~2026.
- 3 Katsevich A. Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone-

- beam CT [ J ]. *Physics in Medicine and Biology*, 2002, **47** ( 15 ): 2583 ~ 2597.
- 4 Katsevich A. An improved exact filtered backprojection algorithm for spiral computed tomography [ J ]. *Advances in Applied Mathematics*, 2004, **32** ( 4 ): 681 ~ 697.
  - 5 Katsevich A. On two versions of 3PI algorithm for spiral CT [ J ]. *Physics in Medicine and Biology*, 2004, **49** ( 11 ): 2129 ~ 2143.
  - 6 Zou Y, Pan X. Exact image reconstruction on PI-lines from minimum data in helical cone beam CT [ J ]. *Physics in Medicine and Biology*, 2004, **49** ( 6 ): 941 ~ 959.
  - 7 Zou Y, Pan X. Image reconstruction on PI-lines by use of filtered backprojection in helical cone beam CT [ J ]. *Physics in Medicine and Biology*, 2004, **49** ( 6 ): 2717 ~ 2731.
  - 8 Danielsson P E, Edholm P, Seger M. Towards exact 3D-reconstruction for helical cone-beam scanning of long objects: a new detector arrangement and a new completeness condition [ A ]. In: *Proceedings of International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine* [ C ], Pittsburgh, Pa, USA, 1997: 141 ~ 144.
  - 9 Noo F, Pack J, Heuscher D. Exact helical reconstruction using native cone-beam geometries [ J ]. *Physics in Medicine and Biology*, 2003, **48** ( 23 ): 3787 ~ 3818.
  - 10 Kak A C, Slaney M. *Principles of Computed Tomography* [ M ], Piscataway, NJ: IEEE Press, 1987: 49 ~ 112.
  - 11 Herman G T. *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography* [ M ], London: Academic Press, 1980.
  - 12 Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography* [ M ], New York: Wiley Press, 1986.